Durée : 4 heures

On désigne par :

$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels $\geqslant 0$;

$\mathbb{R}^*$ l'ensemble des nombres réels non nuls, $\mathbb{R}^*_+$ l'ensemble des réels > 0;

$\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels;

$\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.

Préliminaires

1° Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombre réels tels que $a_n \neq -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = \prod_{p=0}^{n} (1 + a_p) = (1 + a_0)(1 + a_1) \ldots (1 + a_n).$$

Montrer que, si la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ converge absolument, la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite non nulle.

2° Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite dans $\mathbb{R}$ et x un nombre réel non nul. On dira que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ est convergente si, et seulement si, les deux séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ sont convergentes et on posera

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right) + a_0 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n} \right);$$

$f(x)$ est la somme de la série pour la valeur x de la variable et on définit ainsi une application f de l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels la série converge, dans $\mathbb{R}$.

Tournez la page S. V. P.

On remarquera que, si on pose $x = \frac{1}{X}$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} X^n$, est une série entière en X.

a. Montrer rapidement, en utilisant les résultats connus sur les séries entières que l'on peut avoir les circonstances suivantes :

1. La série diverge pour tout $x \in \mathbb{R}^*$;

2. Il existe r et R dans $\mathbb{R}_+$ tels que $0 \leqslant r \leqslant R$ (R pouvant être égal à $+\infty$) et :

— si $|x| < r$ la série diverge (*i.e.* est non convergente),

— si $|x| > R$ la série diverge,

— si $r < R$ et si $r < |x| < R$, la série converge absolument,

c'est-à-dire que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ convergent absolument.

Nota. — On ne donnera pas d'exemples et on n'étudiera pas le cas $r = R$.

b. On se place dans le cas $r < R$;
alors f est une application de $]-R, -r[\cup]r, R[$ dans $\mathbb{R}$.

Prouver, en utilisant les résultats connus sur les séries entières, que f est indéfiniment dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $r < |x| < R$ et qu'en particulier :

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\, a_n x^{n-1}$$

Nota. — On admettra que si $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n x^n$ pour tout x tel que $r < x < R$, alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Problème

Dans tout le problème on désigne par α et λ deux réels donnés tels que $|\lambda| < 1$, $\lambda \neq 0$ et $\alpha \neq 0$. Les trois parties du problème sont indépendantes, il est cependant conseillé aux candidats de les aborder dans l'ordre.

ENSET (PI) 82

I

On cherche f application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f'(x) = \alpha f(x) + f(\lambda x) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

1° On cherche s'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telle que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ait un rayon de convergence infini et que sa somme $f(x)$ soit solution du problème.

a. Établir la relation de récurrence liant nécessairement a_n et a_{n-1} pour $n \geqslant 1$

b. Soit c donné dans $\mathbb{R}^*$. Prouver l'existence d'une solution unique f, développable en série entière, de rayon de convergence infini et telle que $f(0) = c$.

c. Montrer que, si α et λ sont liés par une certaine relation $\mathcal{R}$, alors f est une fonction polynomiale.

2° On suppose $\mathcal{R}$ non vérifiée.

Soit f la solution définie en 1° b $\left(f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)$. Exprimer a_n en fonction de c et de n, et montrer qu'il existe une constante $k \neq 0$ telle que a_n soit équivalent à $k \dfrac{\alpha^n}{n!}$ quand n tend vers l'infini.

3° On se propose de montrer que toute solution du problème est développable en série entière de x de rayon de convergence infini. Soit donc f une solution non nulle.

a. Montrer que f est indéfiniment dérivable et que

$f^{(p)}(x) = \alpha f^{(p-1)}(x) + \lambda^{p-1} f^{(p-1)}(\lambda x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $p \geqslant 1$

(On a posé $f = f^{(0)}$)

b. Soit $a \in \mathbb{R}^*_+$, on pose $M_p = \sup_{x \in [-a, a]} |f^{(p)}(x)|$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. Prouver qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que :

$$|f^{(p)}(x)| \leqslant |\alpha|^p k, \quad \text{pour tout} \quad x \in [-a, a] \quad \text{et tout } p \in \mathbb{N}$$

c. Conclure (on pourra utiliser la formule de Taylor).

II

On suppose $0 < \lambda < 1$ et on cherche f application dérivable de $\mathbb{R}^*_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$f'(x) = \alpha f(x) + f(\lambda x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $0 < \theta < 1$; on cherche s'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$ et que la fonction $f(x) = x^\theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ soit solution du problème.

1° En utilisant la deuxième question des préliminaires, montrer que les coefficients a_n et a_{n+1} sont nécessairement liés par une certaine relation de récurrence que l'on écrira.

2° Montrer que si α et λ sont liés par une certaine relation $\mathcal{S}$, il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $a_n = 0$, pour tout $n > n_0$.

3° Prouver que, si $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite vérifiant la relation de récurrence du 1°, alors la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$ et que $f(x) = x^\theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ est solution du problème.

4° On suppose $\mathcal{S}$ non vérifiée et $a_0 \neq 0$. Prouver qu'il existe une constante L telle que a_n soit équivalent à $L \dfrac{\alpha^n}{n!} n^{-\theta}$ quand n tend vers $+\infty$. On pourra utiliser sans le démontrer que la suite $n \to d_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \operatorname{Log} n$ admet une limite d non nulle quand n tend vers $+\infty$.

Tournez la page S. V. P.

1281

III

On suppose $-1 < \lambda < 0$ et on cherche f application dérivable de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f'(x) = \alpha f(x) + f(\lambda x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^*$$

1° Montrer que, si f est une application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$, il existe de façon unique une application paire φ et une application impaire ψ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f = \varphi + \psi$.

2° Soit f une solution du problème, $f = \varphi + \psi$, φ paire, ψ impaire. Montrer que φ et ψ vérifient $\varphi'(x) = \alpha \psi(x) - \psi(\mu x)$, $\psi'(x) = \alpha \varphi(x) + \varphi(\mu x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, où $\mu = -\lambda$. Montrer qu'inversement, si φ et ψ, φ paire, ψ impaire, vérifient ces relations, alors $f = \varphi + \psi$ est une solution du problème.

3° Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $0 < \theta < 1$. On cherche s'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telles que les séries $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n x^n$ convergent pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et que les fonctions $\varphi(x) = x^\theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ et $\psi(x) = x^\theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n x^n$ définies pour $x \in \mathbb{R}^*_+$ vérifient les relations du 2° pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$.

a. Écrire les relations de récurrence liant nécessairement a_n, b_n, a_{n-1}, b_{n-1}.

b. On suppose $|\alpha| \geqslant 1$. Montrer que si $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont deux suites vérifiant les relations du *a*, alors les séries $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n x^n$ convergent pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

4° On suppose $|\alpha| \geqslant 1$, $\theta \in \mathbb{R}$, $0 < \theta < 1$. Montrer qu'il existe une et une seule solution du problème pouvant s'écrire $f(x) = |x|^\theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n x^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, où $c_0 = 1$ et $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n x^n$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

129

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail